Możliwości, jakie w teorii równań różniczkowych daje norma Bieleckiego

Antoni Leon Dawidowicz Anna Poskrobko

Adam Bielecki in memoriam

W klasycznym dowodzie istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego
$$x'(t) = f(t, x)$$
z prawą stroną lipschitzowską konstruowany jest ciąg kolejnych przybliżeń postaci
$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s)),$$
a jego zbieżność dowodzona jest poprzez oszacowanie ciągu różnic przez szereg zbieżny. Szereg ten jest postaci $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(t-t_0)^k}{k!}$ i jego zbieżność jest oczywista.
Tą techniką posłużył się Banach dowodząc swojego słynnego twierdzenia o punkcie stałym. Tam jednak, skoro zmienna nie musi być funkcją, pojawiają się pewne ograniczenia przy oszacowaniu szeregu. Po prostu by zagwarantować zbieżność musimy szukać majoranty geometrycznej. Stąd też założenie o spełnianiu warunku Lipschitza ze stałą mniejszą od jedynki. Zastosowanie tej techniki do dowodu wyjściowego twierdzenia gwarantuje jedynie lokalną jednoznaczność.
Prof. Bielecki [1] zaproponował pewien prosty trick. Przestrzeń funkcji ciągłych na przedziale $[t_0, T]$ rozpatrywana jest z normą określoną wzorem
$$\|x\| = \max_{t \in [t_0, T]} e^{-\gamma(t-t_0)} |x(t)|.$$
Wtedy dla dowolnego T przy stosownie dobranym γ odwzorowanie, którego punktu stałego szukamy spełnia założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym.
Wynik Bieleckiego na pierwszy rzut oka wiele nie daje. Przecież z lokalnej jednoznaczności na ogół wynika globalna jednoznaczność. Ten zabawny trick czeka jednak na jego interpretację na gruncie filozofii matematyki.
Są jednak sytuacje, kiedy proste przedłużenie nie jest możliwe i wtedy norma Bieleckiego jest istotnie przydatna [2].

A. L. Dawidowicz, Uniwersytet Jagielloński
Adres e-mail: `Antoni.Leon.Dawidowicz@im.uj.edu.pl`

A. Poskrobko, Politechnika Białostocka
Adres e-mail: `a.poskrobko@pb.edu.pl`

Literatura

[1] Adam Bielecki, *Une remarque sur la methode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la theorie des equations differentielles ordinaires,*, Bull. Acad. Polon. Sci. **III** (1956), no. 4, 261–264.

[2] Antoni Leon Dawidowicz and Anna Poskrobko, *Age-dependent population dynamics with the delayed argument*, pp. 165–174, Birkhäuser Basel, Basel, 2008.