Zdominowana Najlepsza Aproksymacja w sensie relacji Hardy-Littlewood-Pólya w przestrzeniach symetrycznych

Maciej Ciesielski, maciej.ciesielski@put.poznan.pl
Poznań University of Technology, Poznań, Poland

Niech $L^0 = L^0(I)$ będzie zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji równoważności funkcji mierzalnych o wartościach rzeczywistych na zbiorze $I = [0,\alpha)$, gdzie $0 < \alpha \leq \infty$. Dla każdego $x \in L^0$ definiujemy $x^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : m(|x| > \lambda) \leq t\}$, $x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)ds$ dla $t > 0$. Przestrzeń funkcyjną Banacha nazywamy symetryczną jeśli dla $x \in L^0$, $y \in E$ gdzie $d_x(\lambda) = d_y(\lambda) = m(|y| > \lambda)$, $\lambda > 0$ mamy $x \in E$, $\|x\|_E = \|y\|_E$. Relacją *Hardy-Littlewood-Pólya* $\prec$ nazywamy relację określoną dla dowolnych $x, y \in L^1 + L^\infty$ następująco

$$x \prec y \Leftrightarrow x^{**}(t) \leq y^{**}(t) \text{ dla każdego } t > 0.$$

Niech $(E, \|\cdot\|_E)$ będzie przestrzenią symetryczną oraz niech $Y \subset X$ będzie niepustym podzbiorem. Dla $x \in X$ oznaczmy

$$P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = dist(x,Y)\}.$$

Każdy element $y \in P_Y(x)$ nazywamy elementem najlepszej aproksymacji w Y do x. Niepusty podzbiór $Y \subset X$ nazywamy *zbiorem proximinalnym* lub *zbiorem istnienia* jeżeli $P_Y(x) \neq \emptyset$ dla każdego $x \in X$. Niepusty podzbiór Y nazywamy *zbiorem Chebyshev'a* jeżeli $P_Y(x)$ jest singletonem dla każdego $x \in E$. Problem najlepszej aproksymacji nazywamy *stabilnym* jeżeli dla dowolnego ciągu minimalizującego $(x_n) \subset Y - x$ mamy $dist(x_n, P_Y(x)) \to 0$ przy $n \to \infty$.

Przestrzeń symetryczną E nazywamy *ściśle K-monotoniczną* ($E \in (SKM)$) jeśli dla każdego $x, y \in E$ gdzie $x^* \neq y^*$, $x \prec y$ mamy $\|x\|_E < \|y\|_E$. Punkt $x \in E$ nazywamy *punktem K-porządkowej ciągłości* w E jeśli dla każdego $(x_n) \subset E$ takiego, że $x_n \prec x$ oraz $x_n^* \to 0$ p.w. mamy $\|x_n\|_E \to 0$. Przestrzeń symetryczną E nazywamy *K-porządkowo ciągłą* ($E \in (KOC)$) jeżeli każdy element $x \in E$ jest punktem K-porządkowej ciągłości. Mówimy, że E jest *jednostajnie K-monotoniczna* ($E \in (UKM)$) jeżeli dla dowolnych $(x_n), (y_n) \subset E$ takich, że $x_n \prec y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|_E \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n^* - y_n^*\|_E = 0.$$

Przedstawimy rezultaty poświęcone zastosowaniu ścisłej K-monotoniczności, K- porządkowej ciągłości oraz jednostajnej K-monotoniczności w zdominowanej najlepszej aproksymacji w przestrzeniach symetrycznych. Scharakteryzujemy relację pomiędzy ścisłą K-monotonicznością, K-porządkową ciągłością oraz zagadnieniem istnienia i jednoznaczności elementu zdominowanej najlepszej aproksymacji w sensie relacji Hardy-Littlewood-Pólya $\prec$. Następnie, omówimy korelację pomiędzy jednostajną K-monotonicznością oraz ciągłością operatora najlepszej aproksymacji. Ostatecznie, przedstawimy związek pomiędzy jednostajną K-monotonicznością oraz stabilnością i proximinalnością problemu zdominowanej najlepszej aproksymacji w sensie relacji $\prec$. Opracowanie zostało przygotowane w oparciu o następujące prace [1, 2].

LITERATURA

[1] M. Ciesielski, *Hardy-Littlewood-Polya relation in the best dominated approximation in symmetric spaces*, J. Approx. Theory 213 (2017), 78-91.

[2] M. Ciesielski & G. Lewicki, *Uniform K-monotonicity and K-order continuity in symmetric spaces with application to approximation theory*, J. Math. Anal. Appl. (2017), https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.07.031