„Curlicues” generowane przez homeomorfizmy okręgu

Justyna Signerska-Rynkowska

„Curlicues” (p. [1, 2, 3]) są to krzywe $\Gamma = \Gamma(u)$ na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, łączące prostoliniowo kolejne punkty $z_0 = 0 \in \mathbb{C}$, z_1, z_2, ..., z_n, ..., gdzie

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2\pi\imath u_k), \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

a $u = (u_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ jest zadanym ciągiem liczbowym. Innymi słowy,

$$z_n = z_{n-1} + \exp(2\pi\imath u_{n-1}),\ n = 0, 1, 2...$$

W przypadku, gdy krzywe te są generowane przez homeomorfizmy okręgu zachowujące orientację, tj. przyjmując że $u_k := f^k(x_0)$, gdzie $x_0 \in \mathbb{R}$, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest podniesieniem pewnego homeomorfizmu stopnia 1 $\varphi : S^1 \to S^1$, można w ładny sposób powiązać własności geometryczne tej krzywej z własnościami dynamicznymi φ. Te interesujące nas własności geometryczne to m.in: ograniczoność, własność tzw. „superficiality” ([2]) czy prędkość przyrastania średnicy w przypadku, gdy krzywa jest nieograniczona oraz zachowania się dyskretnego lokalnego promienia krzywizny ([3]). Przykładowo, badanie ograniczoności krzywej generowanej przez minimalny homeomorfizm okręgu sprowadza się do pytania o istnienie ciągłeego rozwiązania pewnego stowarzyszonego równania kohomologicznego. Natomiast w przypadku, gdy krzywa jest nieograniczona, a liczba obrotu niewymierna można dość dobrze oszacować (podając efektywne wzory) szybkość przyrastania średnicy tej krzywej przy wykorzystaniu własności rozwinięcia liczby obrotu w ułamek łańcuchowy.

Praca powstała w wyniku realizacji projektu badawczego nr UMO-2014/15/B/ST1/01710 finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki.

I. Signerska-Rynkowska, Politechnika Gdańska, ul. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk

Adres e-mail: `justyna.signerska@pg.edu.pl`

Literatura

[1] M.V. Berry and J. Goldberg, *Renormalisation of curlicues*, Nonlinearity **1** (1988), no. 1, 001–26.

[2] F.M. Dekking and M. Mendès France, *Uniform distribution modulo one: a geometrical viewpoint*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **329** (1981), 143–153.

[3] Ya.G. Sinai, *Limit theorem for trigonometric sums. theory of curlicues*, Russian Math. Surveys **63** (2008), no. 6, 1023–1029.