# Zastosowania własności geometrycznych krat Banacha w teorii aproksymacji

Paweł Kolwicz

Załóżmy że $X$ jest przestrzenią Banacha oraz $K$ jest niepustym podzbiorem $X$. Funkcja $P_K : X \to 2^X$ zdefiniowana wzorem

$$P_K(x) = \left\{ u \in K \colon \|u - x\| = \inf_{w \in K} \|w - x\| \right\}$$

nazywana jest projekcją $X$ na $K$. Pojawiają się naturalne pytania jakie własności przestrzeni $X$ pozwalają stwierdzić, że dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego niepustego, domkniętego oraz wypukłego zbioru $K \subset X$ zbiór $P_K(x)$ jest:
$(i)$ niepusty,
$(ii)$ conajwyżej 1-elementowy,
$(iii)$ dokładnie 1-elementowy, odpowiednio. Wiadomo, że warunkiem koniecznym i dostatecznym w powyższych problemach (zwanych problemami najlepszej aproksymacji) jest:
$(i)$ refleksywność,
$(ii)$ ścisła wypukłość,
$(iii)$ refleksywność i ścisła wypukłość przestrzeni Banacha $X$, odpowiednio.

Ponadto naturalne było zmodyfikować powyższe problemy dla krat Banacha. Załóżmy, że $E$ jest kratą Banacha oraz $K$ jest jej niepustą podkratą, tzn. $K$ jest zamknięta na branie skończonych supremów oraz infimów. Odcinek porządkowy $[u, v]$ jest typowym przykładem podkraty. Przez oznaczenie $f \leqslant K$ dla $f \in E$ rozumiemy, że $f \leqslant g$ dla dowolnego $g \in K$. Rozważając powyższe problemy dla systemu $f \leqslant K$ (lub $f \geq K$), zatem w sytuacji mniej ogólnej niż dla przestrzeni Banacha, spodziewamy się, że odpowiednie własności dla krat Banacha, wymuszające odpowiedź pozytywną, będą słabsze niż dla przestrzeni Banacha. W istocie, refleksywność jest wtedy zastąpiona przez porządkową ciągłość, a ścisła wypukłość przez ścisłą monotoniczność w problemach zdominowanej najlepszej aproksymacji.

Zauważmy również, że studiowanie własności globalnych nie zawsze jest wystarczające. W sytuacji gdy przestrzeń (krata) Banacha nie ma własności globalnej naturalne jest badać strukturę pojedynczego elementu. To prowadzi do pojęcia punktu ekstremalnego, punktu dolnej (górnej) monotoniczności w przypadku ścisłej wypukłości, ścisłej monotoniczności, odpowiednio. Struktura pojedynczego punktu przestrzeni (kraty) Banacha była i jest nadal przedmiotem wielu intensywnych i różnorodnych badań. Pytanie o wpływ struktury geometrycznej ustalonego punktu $f$ kraty Banacha $E$ na liczność zbioru $P_K(f)$ związane jest z problemem lokalnej zdominowanej najlepszej aproksymacji.

W prezentacji przypomnimy klasyczne wyniki dla najlepszej aproksymacji w przestrzeniach Banacha i zaprezentujemy rezultaty dla zdominowanej najlepszej aproksymacji w kratach Banacha oraz dla lokalnej zdominowanej najlepszej aproksymacji w kratach Banacha.

I. Paweł Kolwicz, Instytut Matematyki, Politechnika Poznańska, ul. Piotrowo 3A, 60-965 Poznań

*Adres e-mail*: pawel.kolwicz@put.poznan.pl

# Literatura

[1] M. Ciesielski, P. Kolwicz and A. Panfil, *Local monotonicity structure of symmetric spaces with applications*, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), 649–662.

[2] M. Ciesielski, P. Kolwicz and R. Płuciennik, *Local approach to Kadec–Klee properties in symmetric function spaces*, J. Math. Anal. Appl. 426, no. 2 (2015), 700–726.

[3] P. Foralewski, H. Hudzik, W. Kowalewski and M. Wisła, *Monotonicity Properties of Banach Lattices and Their Applications – a Survey*, Ordered Structures and Applications, Positivity VII (Zaanen Centennial Conference), 2013, Leiden, The Netherlands, Birkhäusers 'Trends in Mathematics' series, Ben de Pagter; Mark Veraar; Onno van Gaans, 203-232.

[4] H. Hudzik, *Istnienie i jedyność elementu najlepszej aproksymacji w przestrzeniach Banacha*, V Ogólnopolskie warszaty dla młodych matematyków, Teoria aproksymacji, Kraków, 23-29 września 2002, s. 59-66.

[5] H. Hudzik and W. Kurc, *Monotonicity properties of Musielak-Orlicz spaces and dominated best approximation in Banach lattices*, J. Approx. Theory 95, (1998), 353-368.

[6] W. Kurc, *Strictly and uniformly monotone Musielak-Orlicz spaces and applications to best approximation*, J. Approx. Theory 69.2 (1992), 173-187.