# Jądro ciepła dla operatorów nielokalnych

Krzysztof Bogdan Paweł Sztonyk Victoria Knopova

Niech $d \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ i jądro całkowe $\nu(z, A) \geq 0$ na $\mathbb{R}^d$ spełnia warunki

$$\nu(x, A) = \nu(x, -A), \quad x \in \mathbb{R}^d, \; A \subset \mathbb{R}^d,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (1 \wedge |z|^2) \, \nu(x, dz) < \infty.$$

Definiujemy, np. dla $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$,

$$Lf(x) \;\; = \;\; \int\limits_{\mathbb{R}^r} \left( \tfrac{1}{2} f(x+z) + \tfrac{1}{2} f(x-z) - f(x) \right) \nu(x, dz).$$

W pracy [1] konstruujemy i szacujemy półgrupę markowską, tj. jądro ciepła, tj. prawdopodobieństwo przejścia $p_t(x, y)$ generowane przez $L$. Otrzymujemy rozwiązanie $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x, y) f(y) dy$ następującego problemu Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \left(\partial_t - L_x\right) u(t, x) = 0, \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R}^d, \\ \qquad\qquad u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Jest to dobra okazja, żeby zilustrować związki miedzy teorią procesów Markowa a nielokalnymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Wyniki z anonsowanej pracy uzyskane są przy pewnych dodatkowych technicznych założeniach na $\nu$:

$$c^{-1} \nu_0(A) \leq \nu(x, A) \leq c \nu_0(A),$$

$$|\nu(x_1, A) - \nu(x_2, A)| \leq c |x_1 - x_2|^\eta \; \nu_0(A),$$

gdzie $\eta > 0$, $\nu(x, dz) = h(x, z) \nu_0(dz)$, funkcja $h$ jest ograniczona z góry i z dołu i jednostajnie względem $z$ hölderowska względem $x$, miara $\nu_0$ nie jest skoncentrowana na właściwej podprzestrzeni liniowej $\mathbb{R}^d$, i we współrzędnych biegunowych,

$$\nu_0(dr d\theta) = r^{-1-\alpha} dr \mu_0(d\theta) \quad \text{on} \;\; (0, \infty) \times \mathbb{S}^{d-1}.$$

Tutaj $\alpha \in (0, 2)$. Ostatni warunek techniczny jest związany z pracą [2]:

$$\nu_0(B(\theta, r)) \leq c r^\gamma, \qquad \text{dla} \;\; |\theta| = 1, \; 0 < r < 1/2,$$

oraz $\alpha + \gamma > d$.

K. Bogdan, Wydział Matematyki, Politechnika Wrocławska
*Adres e-mail*: `Krzysztof.Bogdan@pwr.edu.pl`

# Literatura

[1] K. Bogdan, P. Sztonyk, and V. Knopova, *Heat kernel of anisotropic nonlocal operators*, ArXiv e-prints (2017).

[2] Krzysztof Bogdan and PawełSztonyk, *Estimates of the potential kernel and Harnack's inequality for the anisotropic fractional Laplacian*, Studia Math. **181** (2007), no. 2, 101–123. MR 2320691