Oszacowania wielomianów i ich pochodnych: od nierówności Markowów do funkcji ekstremalnych Pleśniaka

Mirosław Baran

Klasyczne nierówności, szacujące pochodne wielomianu P na przedziale $[-1,1]$ były dziełem braci Markowów:

- $\max\{|P'(z)|,\ z \in [-1,1]\} \leq n^2 \max\{|P(z)|,\ z \in [-1,1]\},\ n = \deg P$ - Andriej A. Markow 1892

- $\max\{|P^{(k)}(z)|,\ z \in [-1,1]\} \leq n^2 \cdots (n^2-(k-1)^2)/(2k-1)!! \max\{|P(z)|,$ $z \in [-1,1]\}$ - Władimir A. Markow 1896

- Jeżeli $q(P) = ||P||$ jest ustaloną normą na przestrzeni wielomianów N zmiennych $\mathbb{P}(\mathbb{K}^N)$ to q ma *własność W. Markowa* jeżeli istnieją stałe M, m takie, że

  $$||D^\alpha P|| \leq M^k (\deg P)^m \left(\frac{1}{k!}\right)^{m-1} ||P||,\ |\alpha| = k \geq 1.$$

  Jeżeli założymy powyższy warunek tylko dla $k=1$ to norma q będzie miał *własność A. Markowa*, w szczególności jeżeli $q(P) = ||P||_E$ to E będzie miał własność Markowa.

- *Radialna funkcja ekstremalna Siciaka* dla q zdefiniowana jest jako

  $$\varphi(q,r) = \sup\{||P(x+z)||^{1/\deg P}:\ \deg P \geq 1 \geq ||P||,\ ||z|| = r\},\ r \geq 0.$$

  $$\varphi_n(q,r) = \sup\{||P(x+z)||:\ n \geq \deg P \geq 1 \geq ||P||,\ ||z|| = r\}.$$

- *Funkcje ekstremalne Pleśniaka.* Jeżeli $s \geq 0$ to definiujemy dla $t \geq 0$

  $$\mathcal{P}_s(q,t) = \sup_{n\geq 1} \varphi_n(q, t/n^s).$$

  Z własnością W. Markowa związane są funkcje

  $$\mathcal{B}_\alpha(q,t) := \sup_{n\geq 1}\sup_{k\geq 1} \varphi_n\left(q, t\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\right)^{1/k} = \sup_{k\geq 1} \mathcal{P}_\alpha(q, tk^\alpha)^{1/k}.$$

Celem referatu będzie przedstawienie wybranych problemów i wyników związanych z badaniem wzrostu wielomianów i ich pochodnych i powiązań między tymi problemami.

Mirosław Baran, Katedra Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
Adres e-mail: `miroslaw.baran@urk.edu.pl`