Moralne i niemoralne dyskretne statystyczne modele graficzne

Jacek Wesołowski

W statystyce matematycznej od lat osiemdzisiątych poprzedniego wieku grafy wykorzystywane są do modelowania struktury markowskiej wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa - zob. [1].

Niech $\mathcal{G}$ oznacza DAG (directed acyclic graph) o szkielecie będącym grafem nieskierowanym $G = (V, E)$, gdzie V to (skończony) zbiór wierzchołków, a E zbiór krawędzi. Niech $\mathfrak{pa}(v)$ oznacza zbiór rodziców wierzchołka v, a $\mathfrak{nd}(v)$ zbiór wierzechołków, które nie są potomkami wierzchołka v (nieosiągalnych skierowaną ścieżką z v).

Z każdym wierzchołkiem u wiąże się składową X_u wektora losowego $\mathbf{X} = (X_v,\ v \in V)$. Mówimy, że rozkład wektora $\mathbf{X}$ jest markowski względem DAGu $\mathcal{G}$ jeśli $\forall\, u \in V$ zmienna losowa X_u i wektor losowy $(X_v,\ v \in \mathfrak{nd}(u) \setminus \mathfrak{p}(u))$ są warunkowo niezależne pod warunkiem wektora losowego $(X_v,\ v \in \mathfrak{p}(u))$. Klasycznemu pojęciu markowskości odpowiada wtedy łańcuch skierowany $1 \to 2 \to \ldots \to n$. Jeśli rozkład prawdopodobieństwa wektora $\mathbf{X}$ jest dyskretny, tzn. $\mathrm{P}(\mathbf{X} = \mathbf{i}) = p(\mathbf{i})$, $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$, założenie markowskości względem DAGu $\mathcal{G}$ nakłada warunki faktoryzacyjne na wektor prawdopodobieństw $\mathbf{p} = (p(\mathbf{i}),\ \mathbf{i} \in \mathbf{I})$. Rodzina DAGów o zadanym szkielecie dzieli się na rozłączne klasy zadające te same warunki na prawdopodobieństwo $\mathbf{p}$. DAGi z tej samej rodziny są markowsko równoważne.

Okazuje się, że rodziny takie można scharakteryzować w terminach czysto grafowych za pomocą pojęcia niemoralności: mówimy, że trójka $(a; b, c)$, $a, b, c \in V$, jest niemoralnością w $\mathcal{G}$ jeśli $b, c \in \mathfrak{p}(a)$ oraz b i c nie są połączone krawędzią. Na szczególną uwagę zasługują modele *moralne*, tzn. związane z DAGami, dla których zbiór niemoralności jest pusty. W tej sytuacji dobrze rozwinięte jest podejście bayesowskie, w którym na wektor prawdopodobieństw nakłada się miarę probabilistyczną. Jest to miara na rozmaitości (zawartej w sympleksie jednostkowym) wzynaczonej przez warunkowe niezależności pochodzące od moralnego DAGu. W modelach *niemoralnych* (czyli w takich, w których zbiór niemoralości pusty nie jest) sytuacja jest zdecydowanie bardziej skomplikowana. W szczególności, do jej opisu wykorzystuje się specjalne grafy łańcuchowe, zwane grafami istotnymi (ang. essential).

W wykładzie omówimy główne fakty dotyczące dyskretnych modeli graficznych oraz naszkicujemy nowe wyniki uzyskane ostatnio wspólnie z Helene Massam

(York University, Toronto) [3] oraz bardzo ostatnio z Johnem Noble (Uniwersytet Warszawski) [2].

I. Jacek Wesołowski, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
Adres e-mail: `wesolo@mini.pw.edu.pl`

Literatura

[1] S.L. Lauritzen, *Graphical models*, Oxford Univ. Press, New York, 1996.

[2] Noble J. Wesołowski J. Massam, H., *Markov graphical models: from dags to essential graphs through quasi-essential graphs*, w przygotowaniu (2017), 1–20.

[3] Wesołowski J. Massam, H., *A new prior for discrete dag models with a restricted set of directions*, Annals of Statistics **44** (2016), no. 3, 1010–1037.