O quandlach afinicznych i quasi-afinicznych

Anna Zamojska-Dzienio

Podczas referatu przedstawię wyniki uzyskane wspólnie z P. Jedličką, A. Pilitowską i D. Stanovským [1, 2].

Algebrę binarną $(Q, *)$ nazywamy *quandlem* jeśli, dla dowolnych $x, y, z \in Q$, zachodzą następujące warunki:

1. $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ (mówimy, że Q jest *lewo rozdzielna*),
2. równanie $x * u = y$ ma jednoznaczne rozwiązanie $u \in Q$ (mówimy, że Q jest *lewą quasigrupą*),
3. $x * x = x$ (mówimy, że Q jest *idempotentna*).

Z aksjomatów $(1) - (2)$ otrzymujemy, że każda lewa translacja o element $a \in Q$, tzn. odwzorowanie $L_a : Q \to Q$, $x \mapsto a * x$, jest automorfizmem Q. Algebry spełniające te dwa aksjomaty nazywane są *rakami*.

Raki i quandle pojawiają się w topologii, algebrze uniwersalnej i kombinatoryce, a główną motywacją do ich badania jest znalezienie łatwo obliczalnych niezmienników węzłów. Wymienione wyżej trzy własności definiujące quandle odpowiadają trzem ruchom Reidemeistera [5]. Wiadomo także, że raki i quandle są ściśle związane z niezdegenerowanymi teorio-mnogościowymi rozwiązaniami kwantowego równania Yanga-Baxtera (QYBE): rak i rozwiązanie pochodne to dokładnie to samo, natomiast każde injektywne rozwiązanie pochodne jest quandlem [4].

Ważnymi przykładami są *quandle afiniczne* (inaczej: *quandle Alexandera*) otrzymane w następujący sposób: dla danej grupy abelowej $(A, +)$ i jej automorfizmu f, przez $\mathrm{Aff}(A, f)$ oznaczamy quandel na zbiorze A z operacją $x*y = x - f(x) + f(y)$. Istnieje silny związek pomiędzy tzw. kolorowaniem afinicznym i niezmiennikiem Alexandera. W pracy [4] pokazano, że wszystkie nierozkładalne, niezdegenerowane, teorio-mnogościowo rozwiązania QYBE zbudowane na zbiorze, którego liczba elementów jest liczbą pierwszą, są afiniczne (podano także kompletną klasyfikację takich rozwiązań). W języku teorii quandli rezultat ten oznacza, że każdy skończony quandel spójny o pierwszej liczbie elementów jest izomorficzny z pewnym quandlem Alexandera.

Quandle afiniczne spełniają dodatkową równość: dla każdego $x, y, u, v \in Q$,

$$(x * y) * (u * v) = (x * u) * (y * v),$$

czyli są to quandle *medialne*. Inną ciekawą i ważną klasę quandli medialnych tworzą quandle *quasi-afiniczne*: quandle, które zanurzają się w quandle Alexandera. Są to więc quandle izomorficzne z podalgebrami quandli afinicznych. Ta klasa generuje rozmaitość wszystkich quandli medialnych [3].

Przedstawię nasze twierdzenia o charakteryzacji dla quandli afinicznych oraz dla quandli quasi-afinicznych. W tym celu opiszę własności grup przesunięć obu typów quandli, a także bezpośrednią konstrukcję takich quandli. Omówię również pewne ich własności charakteryzujące, które są istotne z punktu widzenia algebry uniwersalnej. Dzięki uzyskanym rezultatom skonstruowaliśmy efektywne algorytmy pozwalające rozpoznawać quandle afiniczne i quasi-afiniczne oraz policzyliśmy quandle quasi-afiniczne niskich rzędów (z dokładnością do izomorfizmu).

A. Zamojska-Dzienio, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa
Adres e-mail: `A.Zamojska-Dzienio@mini.pw.edu.pl`

Literatura

[1] P. Jedlička, A. Pilitowska, D. Stanovský, and A. Zamojska-Dzienio, *The structure of medial quandles*, J. Algebra **443** (2015), 300–334.

[2] ———, *Subquandles of affine quandles*, submitted `http://arxiv.org/abs/1708.02362` (2017).

[3] P. Jedlička, A. Pilitowska, and A. Zamojska-Dzienio, *Free medial quandles*, Algebra Universalis **78** (2017), 43–54.

[4] P. Etingof, A. Soloviev, and R. Guralnick, *Indecomposable set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation on a set with a prime number of elements*, J. Algebra **242** (2001), 709–719.

[5] D. Joyce, *Classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Applied Algebra **23** (1982), 37–65.