Operatory lokalnie określone

Małgorzata Wróbel

Operator przekształcający pewną klasę funkcji $\mathcal{G}$ określonych na przestrzeni topologicznej X w klasę funkcji $\mathcal{H}$ określonych na tej samej przestrzeni nazywamy lokalnie określonym (lokalnym), jeżeli z równości funkcji z klasy $\mathcal{G}$ na podzbiorach otwartych wynika równość obrazów operatora na tych podzbiorach. Każdy operator Niemyckiego (zwany także operatorem złożenia lub superpozycji) $H : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ generowany przez funkcję dwóch zmiennych h następująco:

$$H(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)), \quad \varphi \in \mathcal{G}, \quad x \in X,$$

jest operatorem lokalnie określonym.

Pokażemy, że jedynym operatorem lokalnie określonym działającym z przestrzeni funkcji spełniających warunek Höldera [3], czy też z przestrzeni funkcji ciągłych o ograniczonej φ-wariacji [4] w siebie, jest operator Niemyckiego.

Okazuje się jednak, że w przypadku gdy klasy funkcji $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ są bardziej specjalne, to operator Niemyckiego nie wystarcza do opisania wszystkich możliwych form operatorów lokalnie określonych $K : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Przyjmijmy np., że $X \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, a $\mathcal{G}$ jest klasą $C^m(X)$ wszystkich funkcji z ciągłą m-tą pochodną w X oraz $\mathcal{H} = C^k(X)$ jest klasą wszystkich funkcji z ciągłą k-tą pochodną w X. Wówczas jeżeli $K : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ jest lokalnie określony, to istnieje taka funkcja $h : X \times \mathbb{R}^{m+1-k} \to \mathbb{R}$, że

$$K(\varphi)(x) = h\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(m-k)}(x)\right), \qquad \varphi \in C^m(X), \ x \in X.$$

Przypadek, gdy $k \in \{0, 1\}$ został udowodniony w pracy K. Lichawskiego, J. Matkowskiego, J. Misia [1], zaś gdy $k \geq 2$ został otrzymany w pracy [2] dla funkcji różniczkowalnych w sensie Whitney'a oraz przy dodatkowym, słabym założeniu regularnościowym. Zauważmy bowiem, że jeśli operator $K : C^0(X) \to C^0(X)$ jest lokalnie określony, to jest on operatorem Niemyckiego i, w myśl twierdzenia Krasnosielskiego, jego generator h jest funkcją ciągłą. Podobnie, jeżeli $K : C^1(X) \to C^1(X)$ jest lokalnie określony, to jest także operatorem Niemyckiego, jednak, co jest raczej w tej sytuacji dość nieoczekiwane, funkcja h nie musi być nawet ciągła. Okazuje się [1], że istnieją nieciągłe funkcje $h : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których operator K określony wzorem

$$K(\varphi)(x) = h(x, \varphi(x)) \quad (x \in X),$$

przekształca klasę funkcji $C^1(X)$ w siebie.

M. Wróbel, Instytut Matematyki Politechniki Częstochowskiej, al. Armii Krajowej 21, 42-200 Częstochowa
Adres e-mail: `malgorzata.wrobel@im.pcz.pl`

Literatura

[1] K. Lichawski, J. Matkowski, and J. Miś, *Locally defined operators in the space of differentiable functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **37** (1989), 315–325.

[2] M. Wróbel, *Locally defined operators and a partial solution of a conjecture*, Nonlinear Anal. TMA **72** (2010), 495–506.

[3] ———, *Locally defined operators in the hölder spaces*, Nonlinear Anal. TMA **74** (2011), 317–323.

[4] ———, *Locally defined operators in the space of functions of bounded*, Real Anal. Exch. **38** (2013), no. 1, 79–94.