Hyperrefleksywność – szacowanie odległości przez przestrzenie niezmiennicze

Marek Ptak

Niech $\mathcal{H}$ będzie zespoloną przestrzenią Hilberta. Przez $B(\mathcal{H})$ oznaczmy algebrę wszystkich liniowych ograniczonych operatorów w $\mathcal{H}$. Niech $\mathcal{W} \subset B(\mathcal{H})$ będzie algebra z jedynką domkniętą w "stosownej" topologii. (Typowym przykładem rozważanych przez nas algebr będą algebry $\mathcal{W}(T)$, $\mathcal{W}(\mathcal{S})$ to znaczy algebry generowane przez pojedynczy operator T lub rodzinę operatorów $\mathcal{S}$.) Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest dowolnym operatorem to standardowa odległość od danej algebry $\mathcal{W}$ obliczamy jako $\operatorname{dist}(A, \mathcal{W}) = \inf\{\|A - T\| : T \in \mathcal{W}\}$. Możemy również obliczyć odległość posługując sie przestrzeniami niezmienniczymi. Mianowicie, przez $\operatorname{Lat}\mathcal{W}$ oznaczamy zbiór wszystkich podprzestrzeni domkniętych $\mathcal{L}$ przestrzeni $\mathcal{H}$ niezmienniczych dla wszystkich operatorów algebry $\mathcal{W}$, tzn. $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ dla wszystkich $A \in \mathcal{W}$. Oznaczmy $\alpha(A, \mathcal{W}) = \sup\{\|P^{\perp}AP\| : P \in \operatorname{Lat}\mathcal{W}\}$. Nietrudno zauważyć, że $\alpha(A, \mathcal{W}) \leqslant \operatorname{dist}(A, \mathcal{W})$ dla wszystkich $A \in B(\mathcal{H})$. Arveson nazwał algebrę $\mathcal{W}$ *hyperrefleksywną* jeśli istnieje stała k taka, że

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{W}) \leqslant k\,\alpha(A, \mathcal{W}) \qquad \text{dla wszystkich} \quad A \in B(\mathcal{H}).$$

Zaprezentowane zostaną przykłady algebr hyperrefleksywnych. Omówiona zostanie: sytuacja skończenie wymiarowa, oraz algebry generowane przez operatory mnożenia na przestrzeniach funkcyjnych.

M. Ptak, Katedra Zastosowań Matematyki, Uniwersytet rolniczy w Krakowie
Adres e-mail: `rmptak@cyf-kr.edu.pl`